



UNIwersytet  
JAGIELLOŃSKI  
W KRAKOWIE

**IV edycja szkolnego konkursu  
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”  
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki  
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

*rok szkolny 2016/17*

**III etap**

**Zadanie 1.**

Rozwiąż w liczbach dodatnich  $x, y$  równanie

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} = \frac{1}{xy}$$

**Zadanie 2.**

Oblicz pole trójkąta, którego długości boków wyrażają się najmniejszymi liczbami całkowitymi ze zbioru rozwiązań nierówności

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} \leq \frac{1}{x-2}$$

**Zadanie 3.**

Wewnątrz kwadratu o boku długości jednej jednostki obrano 330 różnych punktów. Wykaż, że istnieje koło o polu  $\frac{1}{18}$ , do którego należy co najmniej 10 z tych punktów.

**Zadanie 4.**

Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej  $x$  zachodzi nierówność

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Termin oddania 02.01.2017