UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

IV edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2016/ 17

I etap

1.Liczbę nazwiemy *dobrą* , jeśli w jej zapisie dziesiętnym żadna cyfra nie powtarza się oraz iloczyn jej cyfr jest równy 360. Podaj dwie takie liczby *dobre* oraz wyznacz największą liczbę o tej własności.

2.Rozwiąż układ równań: $\begin{cases} 2x^3+4=x^2(y+3) \\ 2y^3+4=y^2(z+3) \\ 2z^3+4=z^2(x+3) \end{cases}$ w liczbach rzeczywistych dodatnich.

3.Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p, dla których $p^{p+1}+2$ jest liczbą pierwszą.

4.W krainie łamigłówek poczta drukuje znaczki o wartości 5, 4, 3, 2 i 1 dzięga. Na kwadratowej kopercie mieści się co najwyżej 16 znaczków (4 rzędy po 4 znaczki).Im większa jest wartość znaczków, tym szybciej dociera pismo do adresata. Z powodu nadmiernego zużycia znaczków o wartości 5 dzięgów i przy rosnących zapasach pozostałych, minister wydał zarządzenie, że na kopercie w żadnym rzędzie , żadnej kolumnie i na żadnej z dziesięciu przekątnych nie wolno naklejać znaczka o tej samej wartości. Jaką największą wartość mogą obecnie osiągnąć znaczki naklejone na kopercie?

5. W kwadrat, którego bok ma długość $\boldsymbol{a}$, wpisano dwa romby w ten sposób, że dwa wierzchołki każdego z tych rombów leżą w dwóch przeciwległych wierzchołkach kwadratu, natomiast dwa pozostałe wewnątrz kwadratu. Oblicz pole części wspólnej tych rombów wiedząc, że pole każdego z rombów jest równe połowie pola kwadratu.

Termin oddania 02.11.2016