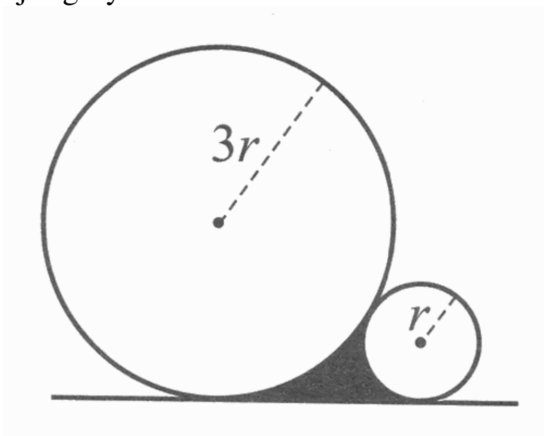
V edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej"
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2017/18

IV etap

1. Niech x, y, z będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Udowodnij, że $\frac{2(x^3 + y^3 + z^3)}{xyz} \le \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - 3$.

2. Oblicz pole zacienionej figury.



3. Rozstrzygnij, czy istnieją liczby całkowite a i b, które spełniają równanie $|a^2 + b| + |a^2 - b| + |a + b^2| + |a - b^2| = 2017$.

4. Zbadaj, dla jakich wartości parametru k $(k \in R)$ wykres funkcji $f(x) = -x^2 - (k+1)x + \left(\sqrt{28\sqrt{5} + 69} + \sqrt{69 - 28\sqrt{5}}\right)$ leży całkowicie pod prostą o równaniu $y = 8$.

5. Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC znajduje się punkt S. Prosta przechodząca przez punkt S i środek ciężkości T tego trójkąta przecina jego boki lub ich przedłużenia odpowiednio w punktach K, L i M. Wykaż, że $\frac{KS}{KT} + \frac{LS}{LT} + \frac{MS}{MT} = 3$.

Termin oddania 29.01.2018