UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

V edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej"
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.

rok szkolny 2017/18

V etap

1. Rozwiązać w liczbach naturalnych równanie

$$55(x^3y^3+x^2+y^2)=229(xy^3+1).$$

2. Dowieść, że wielomian zmiennej x o współczynnikach całkowitych, którego wartość bezwzględna dla trzech różnych całkowitych wartości x jest równa 1, nie ma pierwiastków całkowitych.

3. W trapezie $ABCD$, w którym $AB\|CD$, przekątne przecinają się w punkcie O i tworzą z podstawą kąt $60°$. Wykazać, że środki odcinków $\overline{OA}$, $\overline{BC}$ i $\overline{OD}$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

4. Na boku KL trójkąta KLM wybrano $n-1$ punktów $N_1, N_2, \cdots, N_{n-1}$, które podzieliły ten bok na n odcinków, a na boku ML wybrano $m-1$ punktów $P_1, P_2, \cdots, P_{m-1}$, które podzieliły ten bok na m odcinków.
Następnie połączono punkt M z każdym z punktów $N_1, N_2, \cdots, N_{n-1}$, a punkt K z każdym z punktów $P_1, P_2, \cdots, P_{m-1}$, uzyskując na rysunku wiele różnych trójkątów, których wierzchołki mogą leżeć nie tylko na bokach trójkąta KLM, ale także w punktach przecięcia odcinków $\overline{KP_i}$ oraz $\overline{MN_j}$. Ile jest wszystkich tych trójkątów?

5. Podstawą ostrosłupa jest romb o boku a. Dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa tworzą z płaszczyzną podstawy kąt α, a trzecia ściana boczna tworzy z płaszczyzną podstawy kąt β.

a) Udowodnić, że czwarta ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem β.

b) Wiedząc, że wysokość ostrosłupa jest równa H, znaleźć objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Termin oddania 28.02.2018