



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

**VI edycja szkolnego konkursu
„O jeden poziom abstrakcji wyżej”
objętego patronatem Dziekana Wydziału Matematyki
i Informatyki Uniwersytetu Jagiellońskiego.**

rok szkolny 2018/19

I etap

1. Rozwiąż układ równań
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 26 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$$

2. Udowodnij, że jeżeli suma wszystkich dzielników pewnej liczby naturalnej jest dwa razy większa od tej liczby, to suma odwrotności tych dzielników wynosi 2.

3. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b zachodzi nierówność

$$\sqrt[3]{(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} \leq \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

4. Na przedłużeniach boków AB, BC i CA trójkąta ABC obrano odpowiednio punkty B_1, C_1 i A_1 , że $BB_1 = AC, CC_1 = AB, AA_1 = BC$. Udowodnij, że suma pól trójkątów AA_1B, BB_1C i CC_1A jest co najmniej trzy razy większa od pola trójkąta ABC .

5. Na każdej ścianie sześcianu napisano dodatnią liczbę całkowitą. Następnie w każdym wierzchołku umieszczono liczbę, która jest równa iloczynowi liczb znajdujących się na ścianach, do których ten wierzchołek należy. Jeżeli suma liczb umieszczonych w wierzchołkach jest równa 70, to jakiej liczbie równa się suma liczb znajdujących się na wszystkich ścianach.